PRODUITS DE VECTEURS

Produit scalaire.

Le produit scalaire deux vecteurs est un nombre réel : $\vec{V_1}\cdot\vec{V_2} = V_1 \times V_2 \times \cos(\vec{V_1},\vec{V_2})$

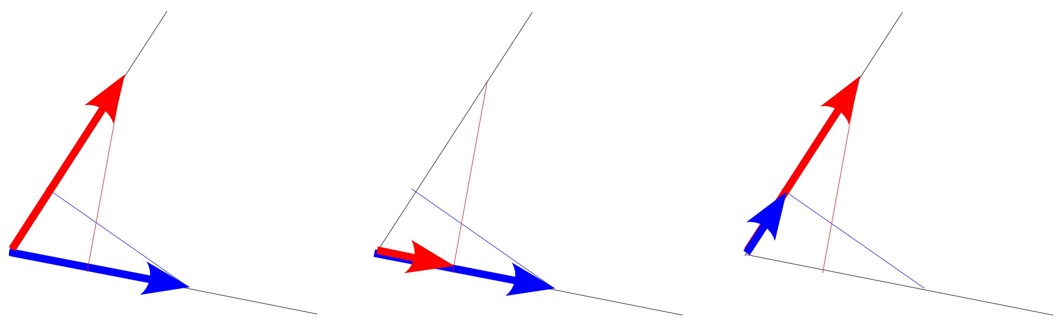
remarque : Le produit scalaire de deux vecteurs de directions orthogonales est nul.

Dans un repère orthonormé :
$\vec{V_1}\cdot\vec{V_2} = (x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\cdot(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}) = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$
(en remarquant que $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$ et $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$)

Le produit scalaire est commutatif : $\vec{V_1}\cdot\vec{V_2} = \vec{V_2}\cdot\vec{V_1}$

Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition : $\vec{V}\cdot(\vec{V_1}+\vec{V_2}) = \vec{V}\cdot\vec{V_1} + \vec{V}\cdot\vec{V_2}$

Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit de la projection orthogonale du premier vecteur sur la direction du second vecteur par le second vecteur :



les produits scalaires correspondant aux trois cas de figure ci-dessus sont égaux

En physique, le produit scalaire est utilisé pour calculer le travail d'une force.
C'est le produit d'une force par un déplacement.
expression différentielle : $dW = \vec{F}\cdot\vec{dl}$
expression intégrée : $W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot\vec{dl}$
si la force $\vec{F}$ est constante sur tout le déplacement $\vec{AB}$ ou si la force $\vec{F}$ dérive d'un potentiel :
$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot\vec{dl} = \vec{F}\cdot\vec{AB} = F\times AB\times\cos(\vec{F},\vec{AB})$

Le travail est une énergie : $[W] = [F]L = [MLT^{-2}]L = ML^2T^{-2}$
Il s'exprime en joule (unité du système international), en électronvolt, ou même en kilowattheure

Produit vectoriel.

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ est un vecteur $\vec{V_3}$: $\vec{V_3} = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$
de direction perpendiculaire au plan formé par $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$
de sens tel que $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}$ forme un trièdre direct (comme pouce, index, majeur, de la main droite)
de valeur $V_3 = V_1 \times V_2 \times \sin(\vec{V_1}, \vec{V_2})$ avec $\sin(\vec{V_1}, \vec{V_2}) < \pi$

remarque : le produit vectoriel de deux vecteurs de même direction est nul.

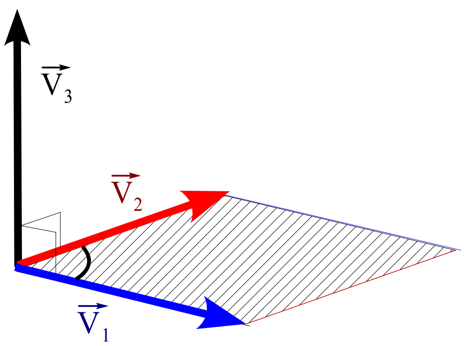
Le produit vectoriel n'est pas commutatif : $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = - \vec{V_2} \wedge \vec{V_1}$

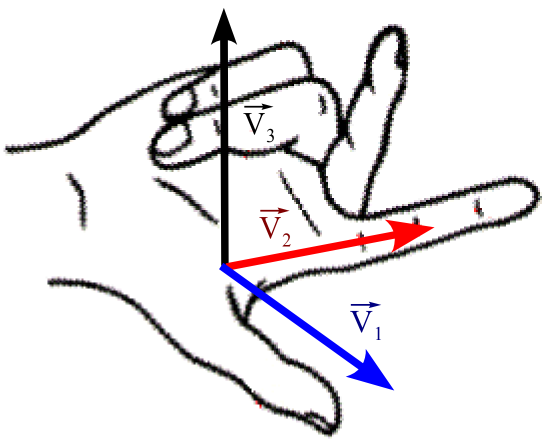
Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition : $\vec{V} \wedge (\vec{V_1} + \vec{V_2}) = \vec{V} \wedge \vec{V_1} + \vec{V} \wedge \vec{V_2}$

Dans un repère orthonormé, le produit scalaire se calcule via le déterminant suivant :

$$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\vec{i} + (x_1 z_2 - x_2 z_1)\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}$$

La valeur du vecteur $\vec{V_3}$ est égale à la surface délimitée par les vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ (surface hachurée sur la figure).





En Physique, le produit vectoriel est utilisé pour calculer la force de Lorentz :
La force de Lorentz $\vec{F}$ est subie par une particule de charge q, de vitesse $\vec{v}$ se déplaçant dans une zone où règne un champ magnétique $\vec{B}$: $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

$\vec{F}$ est orthogonale à $\vec{v}$ et orthogonale à $\vec{B}$ $\quad F = |q| v \times B \times \sin(\vec{v}, \vec{B})$

Dans les unités du système international, F est en newton (N,) q en coulomb (C), v en mètre par seconde (m/s) et B en tesla (T).

remarque : le produit mixte $\vec{v} \cdot \vec{F} = \vec{v} \cdot q\vec{v} \wedge \vec{B}$ est nul ($\vec{F}$ est orthogonal à $\vec{v}$). La puissance de la force de Lorentz est nulle
Quel que soit le déplacement, le travail de la force de Lorentz est toujours nul.
Un champ magnétique dévie une particule chargée mais ne peut ni l'accélérer ni la freiner.