

# EXPONENTIELLE DÉCROISSANTE

Ce type de fonction est rencontré dans beaucoup de chapitres du cours de physique : description de l'activité d'une source radioactive, atténuation d'un faisceau de photons, décharge d'un condensateur dans un circuit RC, annulation du courant dans un circuit RL.....

## 1. Équation différentielle et solution.

Pour simplifier l'écriture et préciser certaines définitions, il est pratique de considérer que la variable  $t$  est une date ;  $X(t)$  est une grandeur quelconque (population, activité, tension, intensité, ...).

Cette fonction  $X(t)$  est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dX}{dt} = - k X \quad (\text{avec } k > 0)$$

qui s'écrit  $\frac{dX}{X} = - k dt$  ; en intégrant,  $\int \frac{dX}{X} = - k \int dt$  , soit  $\ln X + \text{constante} = - kt$

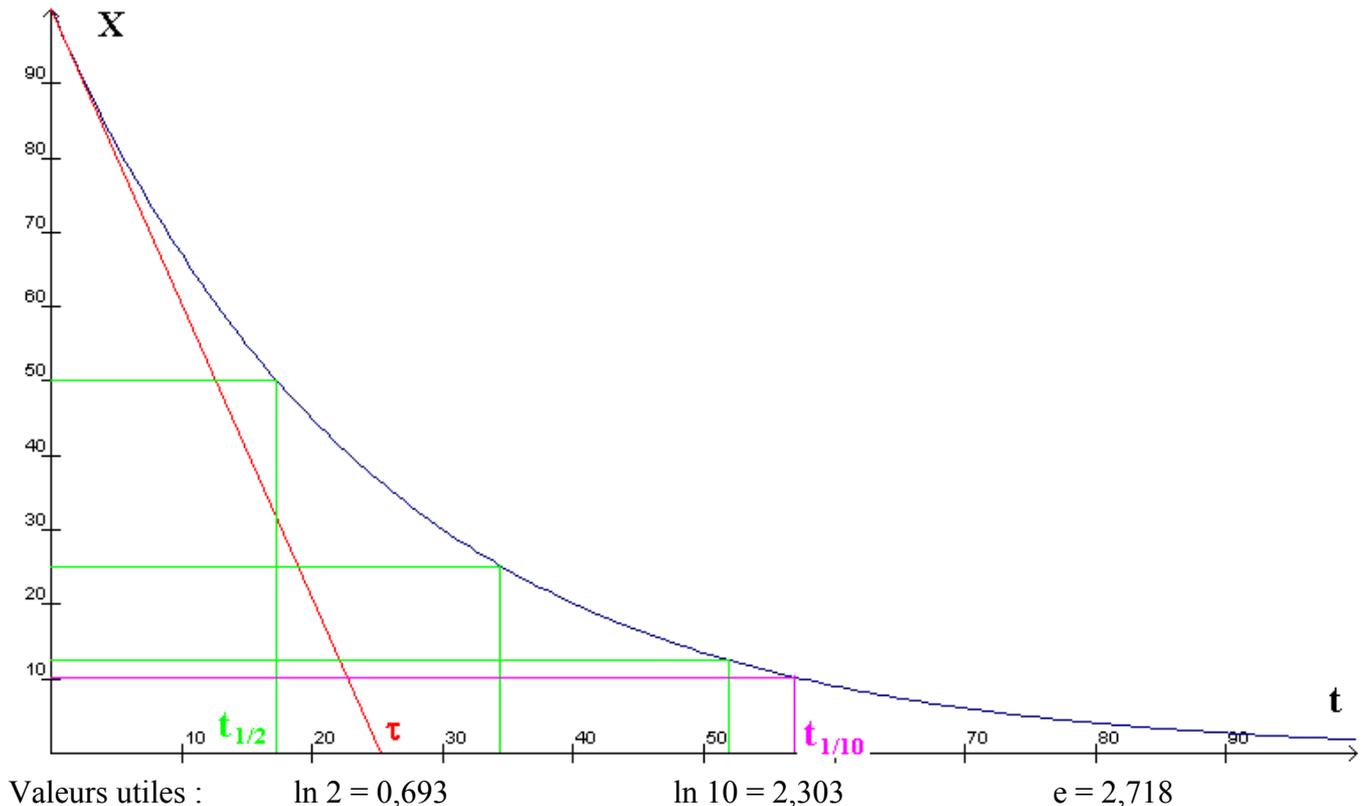
que l'on peut écrire  $\frac{\ln X}{\ln A} = - kt$  , ou encore  $\frac{X}{A} = e^{-kt}$

**La solution est de la forme :  $X(t) = A e^{-kt}$  ,**  
où  $A$  est fixé par les conditions initiales (par exemple valeur de  $X$  lorsque  $t = 0$ ).

*remarque :* la fonction dérivée  $\frac{dX}{dt} = - k X = - k A e^{-kt}$  est aussi une exponentielle décroissante. Attention au signe !

## 2. Représentation graphique de la fonction $X(t) = A e^{-kt}$ .

Ici,  $A = 100$  et  $k = 0,4$ , et  $t$  varie de 0 à 100



### 3. Autres expression de la fonction $X(t) = A e^{-k t}$ .

3.1. Expression faisant intervenir la "durée caractéristique"  $\tau$  (quelquefois appelée maladroitement "constante de temps").

$$X(t) = A e^{-k t} = A e^{-t/\tau}$$

La grandeur  $\tau$  est la durée pour laquelle  $X$  est divisé par  $e$  :  $X(t+\tau) = \frac{X(t)}{e}$

remarque : il est clair que  $\tau = 1/k$ .

3.2. Expression faisant intervenir la "demi-vie"  $t_{1/2}$  (quelquefois appelée maladroitement "période" dans la description des phénomènes radioactivité).

$$X(t) = A e^{-k t} = A 2^{-t/t_{1/2}}$$

La demi-vie  $t_{1/2}$  est la durée pour laquelle  $X$  est divisé par 2 :  $X(t+t_{1/2}) = \frac{X(t)}{2}$

remarque :  $\ln(e^{-k t}) = \ln(2^{-t/t_{1/2}})$  , soit  $k = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$  , soit encore  $t_{1/2} = \tau \ln 2$

3.3. Expression faisant intervenir la "déci-vie"  $t_{1/10}$  (expression plutôt employée pour des phénomènes d'atténuation, la variable  $t$  étant remplacée par le déplacement  $x$ , on parle alors de déci-atténuation, voir le paragraphe suivant)

$$X(t) = A e^{-k t} = A 10^{-t/t_{1/10}}$$

La deci-vie  $t_{1/10}$  est la durée pour laquelle  $X$  est divisé par 10 :  $X(t+t_{1/10}) = \frac{X(t)}{10}$

remarque :  $\ln(e^{-k t}) = \ln(10^{-t/t_{1/10}})$  , soit  $k = \frac{\ln 10}{t_{1/10}}$  , soit encore  $t_{1/10} = \tau \ln 10$

Toutes ces grandeurs sont reportées sur la représentation graphique précédente.

### 4. Exemples d'applications :

#### 4.1. Étude d'un échantillon radioactif en fonction de la date $t$

Le nombre de désintégrations -  $dN / dt$  est proportionnel à la population radioactive  $N$  :  $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$

évolution de la population radioactive  $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$

évolution de l'activité  $A = -\frac{dN}{dt} = A_0 e^{-\lambda t}$  avec  $A_0 = \lambda N_0$  .

**Lorsqu'on attend une demi-vie, l'activité de l'échantillon est divisée par deux.**

#### 4.2. Étude de l'atténuation d'un faisceau de photons en fonction de la pénétration $x$ dans la matière

Le nombre de photons disparaissant sur une épaisseur  $dx$ , -  $dN/dx$  est proportionnel au nombre de photons présents  $N$  :  $\frac{dN}{dx} = -\mu N$  ( $\mu$  est le coefficient linéique d'atténuation)

évolution du nombre de photons  $N(x) = N_0 e^{-\mu x}$

on peut faire intervenir, pour un faisceau monochromatique de photons d'énergie  $h\nu$ , le flux énergétique

$\Phi = h\nu \frac{dN}{dt}$  , qui obéit alors à la même loi :  $\Phi(x) = \Phi_0 e^{-\mu x}$  .

La couche de demi-atténuation se définit par :  $x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}$  (c'est "l'équivalent" de la demi-vie).

La couche de deci-atténuation se définit par :  $x_{1/10} = \frac{\ln 10}{\mu}$

**Lorsque le faisceau pénètre d'une couche de demi-atténuation, le flux énergétique est divisé par deux.  
Lorsque le faisceau pénètre d'une couche de déci-atténuation, le flux énergétique est divisé par dix.**