DÉSINTÉGRATIONS SUCCESSIVES

Dans une famille radioactive, un noyau père (P) se désintègre en un noyau fils (F) qui lui-même se désintègre en un noyau petit-fils (PF)

$$P \overset{T_1, \lambda_1}{\longrightarrow} F \overset{T_2, \lambda_2}{\longrightarrow} PF$$

La population des noyaux-pères évolue selon la loi :

$$N_1 = N_{10}\, e^{-\lambda_1 t}$$

L'activité due à la présence des noyaux pères s'écrit :

$$A_1 = \lambda_1 N_{10}\, e^{-\lambda_1 t}$$

l'évolution de la population N_2 des noyaux-fils est liée à la population N_1 des noyaux-pères par la relation :

$$\frac{dN_2}{dt} = \overbrace{-\lambda_2 N_2}^{\text{désintégration des noyaux fils}} + \overbrace{\lambda_1 N_1}^{\text{désintégration des noyaux pères}}$$

on a donc à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_{10}\, e^{-\lambda_1 t}$$

que l'on peut écrire :

$$\overbrace{\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2}^{\text{équation différentielle}} = \overbrace{\lambda_1 N_{10}\, e^{-\lambda_1 t}}^{\text{second menbre}}$$

Cette équation est une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

La solution est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

1. Recherche de la solution générale.

$$\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2 = 0 \quad \text{s'écrit} \quad \frac{dN_2}{N_2} = -\lambda_2\, dt$$

En intégrant t de 0 à t, et N_2 de $N_{2\,0}$ à N_2 on obtient :

$$\int_{N_{20}}^{N_2} \frac{dN_2}{N_2} = -\lambda_2 \int_0^t dt \text{ , soit } \ln\frac{N_2}{N_{20}} = -\lambda_2 t \text{ , soit } \frac{N_2}{N_{20}} = e^{-\lambda_2 t}$$

On en déduit l'expression de la solution générale :

$$N_2 = N_{20}\, e^{-\lambda_2 t} \quad \text{(a)}$$

2. Recherche de la solution particulière
On essaie une solution de la forme $N_2 = N_0\, e^{-\lambda_1 t}$
en remplaçant on obtient :

$$\lambda_1 N_0\, e^{-\lambda_1 t} = \lambda_2 N_0\, e^{-\lambda_1 t} + \lambda_1 N_{10}\, e^{-\lambda_1 t} \text{ , soit } \lambda_1 N_0 = \lambda_2 N_0 + \lambda_1 N_{10}$$

On en déduit une relation entre N_0 et N_{01} : $N_0 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10}$

Au final, la solution particulière peut s'écrire :

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10}\, e^{-\lambda_1 t} \quad \text{(b)}$$

3. Solution de l'équation différentielle :
En faisant la somme de (a) et (b) on obtient :

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10}\, e^{-\lambda_1 t} + N_{20}\, e^{-\lambda_2 t}$$

les conditions initiales imposent qu'à $t = 0$, $N_2 = 0$ (initialement, seuls les noyaux-pères existent)

on en déduit que : $0 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} + N_{20}$, soit $N_{20} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} N_{10}$

Pour conclure, la solution complète de l'équation différentielle s'écrit :

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} \left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right)$$

dans laquelle N_{10} est la population initiale en noyaux pères.

Le terme en $e^{-\lambda_1 t}$ exprime l'apparition des noyaux fils par désintégration des noyaux pères alors que le terme en $-e^{-\lambda_2 t}$ est lié à la disparition des noyaux fils par désintégration.

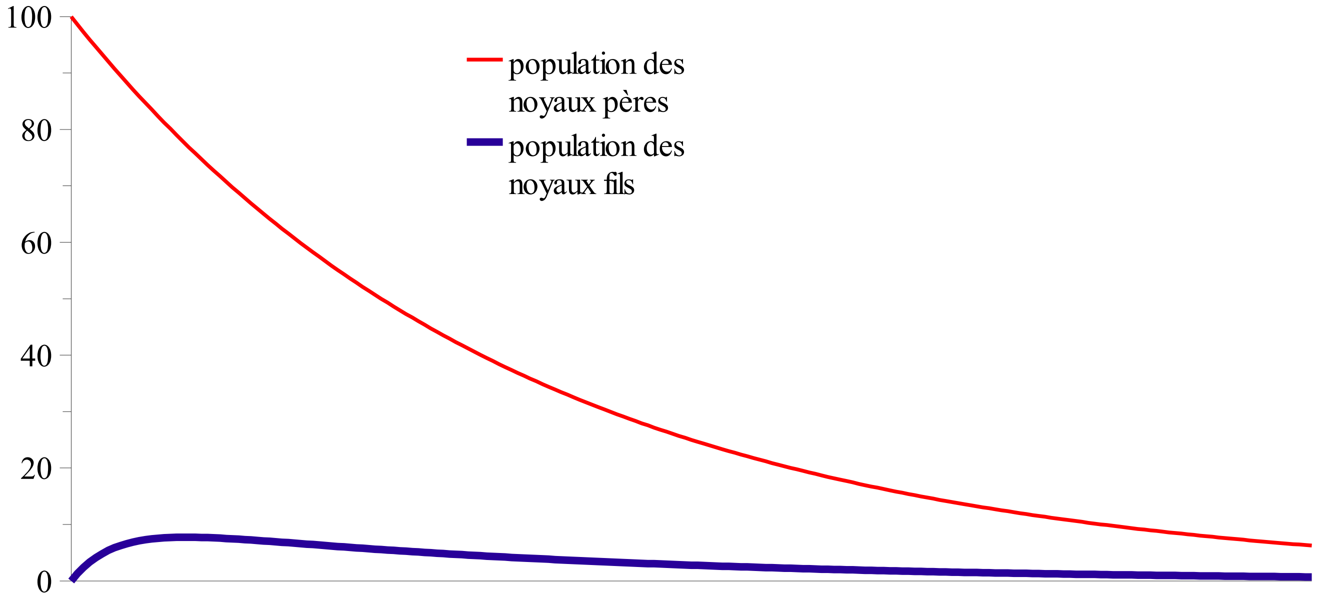
L'activité partielle de l'échantillon due à la présence des noyaux fils se calcule à partir de $A_2 = \lambda_2 N_2$:

$$A_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} \left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right)$$

Les diagrammes suivants montrent l'évolution des populations et des activités dues à chaque génération en fonction du temps.

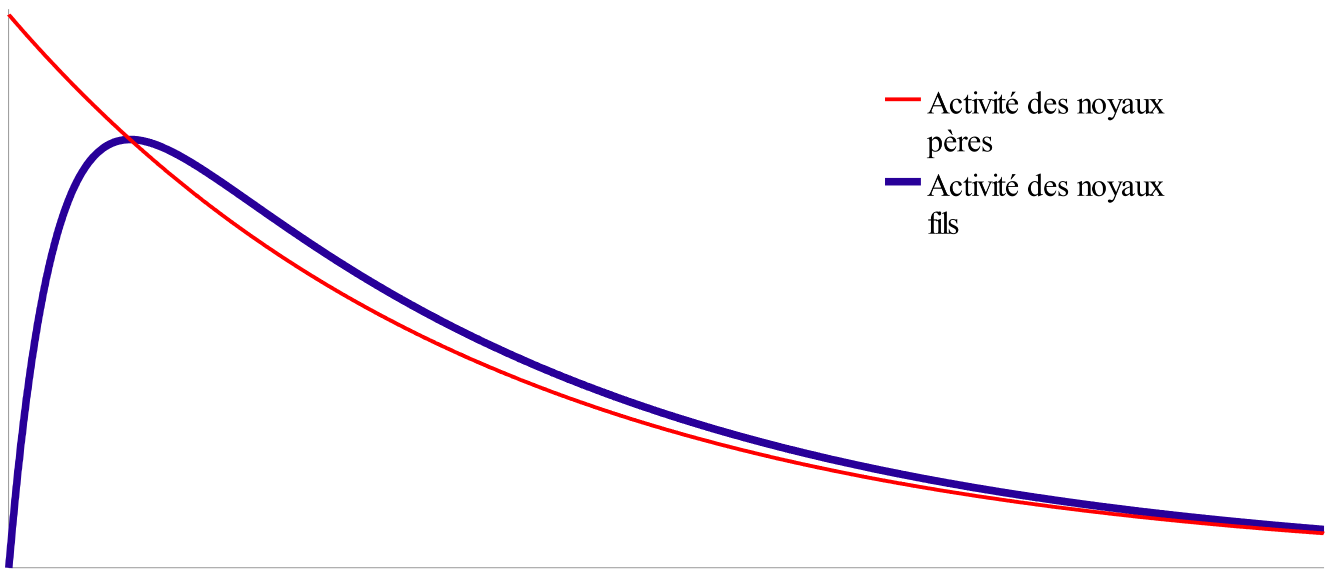
Trois principaux cas peuvent se présenter :

1. Les noyaux-pères sont plus stables que les noyaux-fils : $T_1 >> T_2$

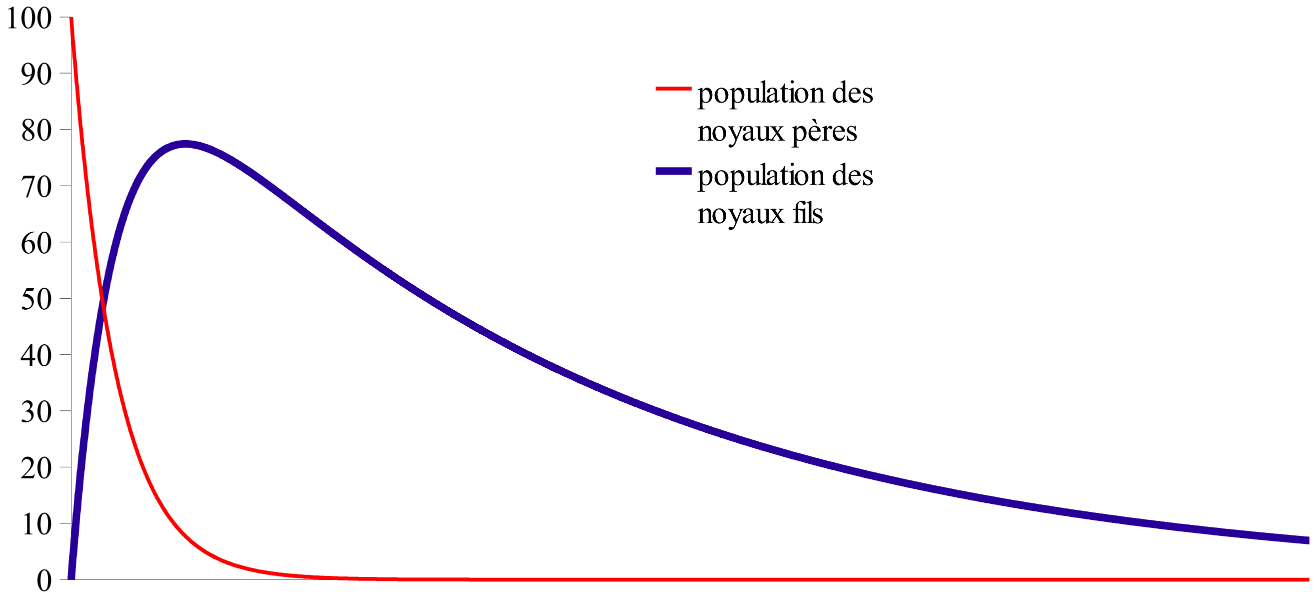


La population des noyaux fils évolue rapidement vers une valeur nulle (à chaque fois qu'un noyau-père se désintègre, le noyau-fils se désintègre immédiatement).

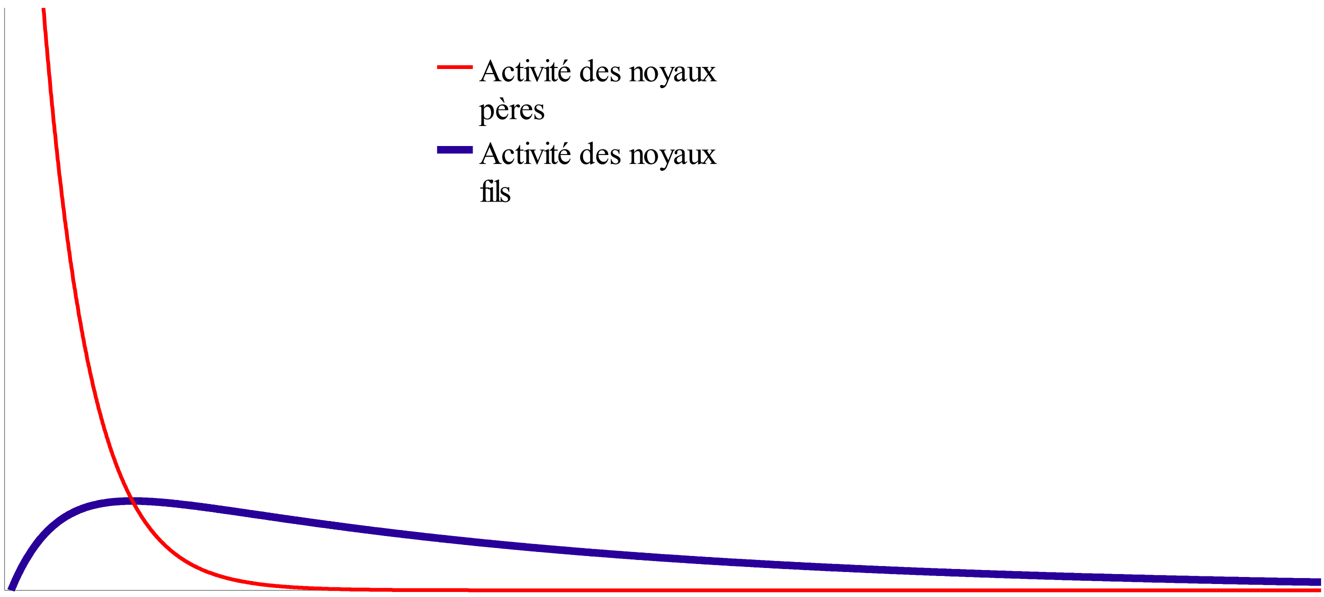
L'activité de la génération fille est assujettie à celle de la génération mère (pour $t \geq 10\ T_1$) et sa demi-vie T_2 n'est pas mesurable directement.



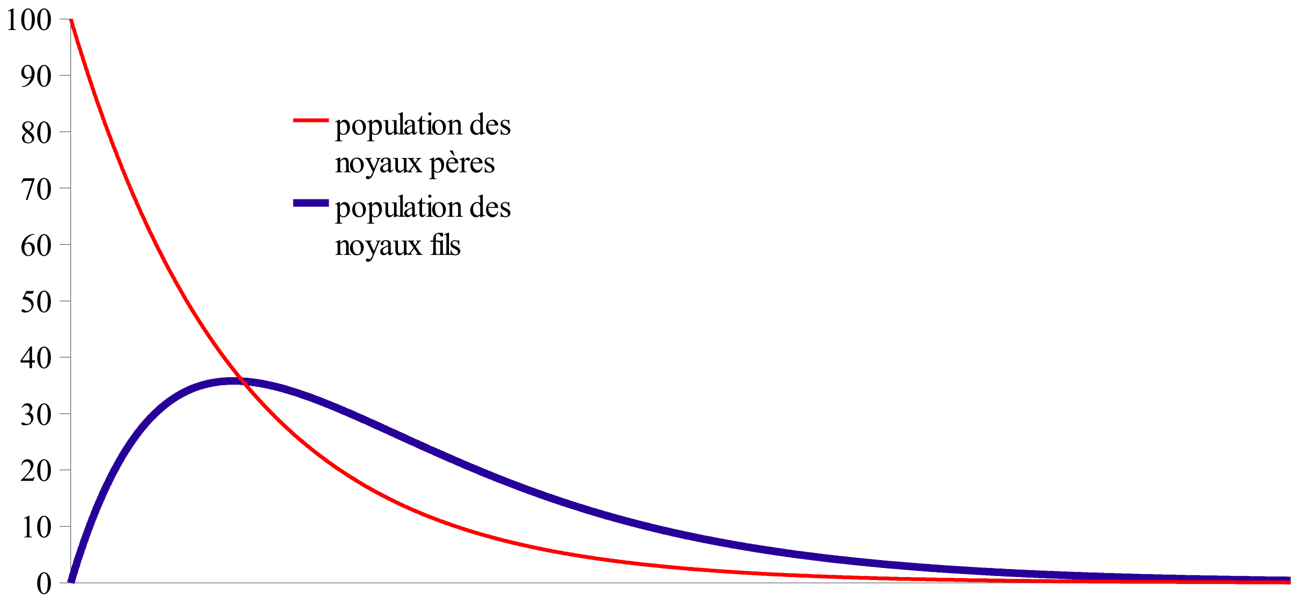
2. Les noyaux-pères sont moins stables que les noyaux-fils : $T_1 << T_2$



La population des noyaux-pères évolue rapidement vers une valeur nulle (pour $t \geq 10\ T_1$) au profit de l'apparition des noyaux fils . L'activité de la population fille est alors indépendante de l'activité de la population-mère.



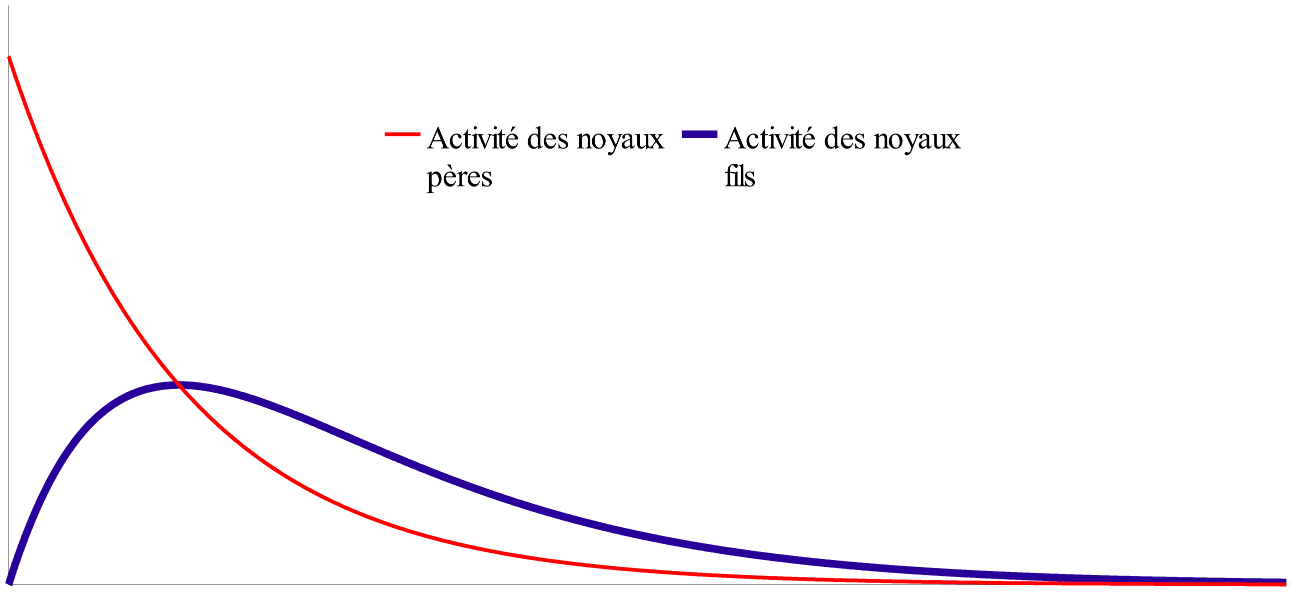
3. Les noyaux-pères et les noyaux-fils sont de stabilité comparables : $T_1 \approx T_2$



L'activité des noyaux fils est maximale quand $\frac{dA_2}{dt} = 0$, soit $\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} = 0$;

Cette condition est atteinte quand $t = \frac{\ln \lambda_1/\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{T_1 T_2}{(T_2 - T_1) \ln 2} \ln \frac{T_2}{T_1}$

Dans ces conditions, les activités sont égales : $A_1 = A_2$



Par exemple, pour le technétium 99m (T_2 = 6h), produit à partir du molybdène 99 (T_1 = 66h), l'activité est maximale 23 heures après l'apparition des premiers noyaux de technétium 99m.